Seminar: Formale Potenzreihen

Wintersemester 2022/23

Benjamin Sambale

Leibniz Universität Hannover

In der Analysis betrachtet man Polynome als Funktionen der Form

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{n=0}^{d} a_n x^n$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. In der Algebra hingegen sind Polynome formale Summen der Form $\sum_{n=0}^{d} a_n X^n$, wobei X eine Unbekannte ist und die Koeffizienten a_n in einem beliebigen Körper K liegen. Eine analoge Unterscheidung kann man mit unendlichen Summen vornehmen: Analytische Potenzreihen sind Funktionen der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, die in einer Umgebung eines Punktes konvergieren. Sie treten beispielsweise als Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion auf.

In der diskreten Mathematik betrachtet man *formale* Potenzreihen, also abstrakte Summen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Die Menge dieser Potenzreihen bildet ähnlich wie die Menge aller (formalen) Polynome eine Ringstruktur mit interessanten algebraischen Eigenschaften. In der Zahlentheorie und Kombinatorik treten formale Potenzreihen als *erzeugende Funktionen* auf. Zum Beispiel untersucht man

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) X^n,$$

wobei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n ist. Zum Beispiel ist $p(5) = 7$, denn

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.$$

In diesem Seminar soll die Theorie der formalen Potenzreihen ohne analytische Hilfsmittel entwickelt werden (insbesondere entstehen keine Fragen zur Konvergenz). Als Anwendung wollen wir u. a. folgende bekannten Sätze beweisen:

- Der 4-Quadrate-Satz: Jede natürliche Zahl ist die Summe von vier Quadratzahlen.
- Die Faulhabersche Formel: Für jedes $d \in \mathbb{N}$ existiert ein Polynom α vom Grad $d+1$ mit

  $$1^d + 2^d + \ldots + n^d = \alpha(n)$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Beispiel: Die Gauß-Formel: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

- Ramanujans „schönste" Formel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)X^n = 5\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-X^{5k})^5}{(1-X^k)^6}.$$

  Sie impliziert $5 \mid p(5n+4)$ für alle $n \geq 0$.

- Die Rogers-Ramanujan-Identitäten mit der kombinatorischen Interpretation: Die Anzahl der Partitionen von n, deren Teile sich um mehr als 1 unterscheiden ist die Anzahl der Partitionen in Teile der Form $\pm 1 + 5k$. Beispiel $7 = 6+1 = 5+2$ vs. $6+1 = 4+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1$.

Die Grundlage des Seminars ist der folgende Artikel:

- B. Sambale, *An invitation to formal power series*, pdf

Die Veranstaltung steht sowohl den Bachelor- und Masterstudiengängen sowie den Lehramtsstudiengängen offen. Zum besseren Verständnis sollten Sie bereits eine Vorlesung zur Algebra oder Diskreten Mathematik besucht haben. Eine Liste der Vortragsthemen wird zu gegebener Zeit bekannt gegeben.

Ihr Vortrag sollte etwa 60 Minuten dauern und somit noch Gelegenheit für Fragen lassen. Zum Bestehen des Moduls ist außerdem eine LaTeX-Ausarbeitung erforderlich. Abgabe spätestens zwei Wochen nach dem Vortrag.