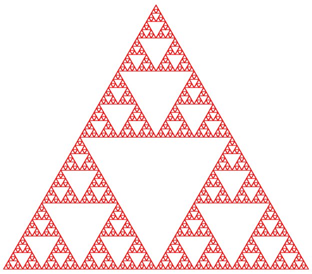
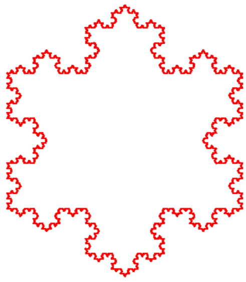
Proseminar Fraktale

Modul	Proseminar (B.Sc. Mathematik)
Zeit	Mittwochs 16-18 Uhr, WS 2021/22
Dozentin	Dr. Eske Ewert (ewert@math.uni-hannover.de)



Sierpinski-Dreieck



Kochsche Schneeflocke

Inhalt

Fraktale wie die Mandelbrotmenge, das Sierpinski-Dreieck oder die Kochsche Schneeflocke hat jede*r schon einmal gesehen. Auch in der Natur lassen sich Fraktale entdecken, zum Beispiel in Bäumen, Blitzen, Flusssystemen oder dem Romanesco-Kohl. In diesem Seminar lernen wir die Mathematik der Fraktale kennen. Dabei untersuchen wir:

- Was bedeutet es, dass Fraktale eine nichtganzzahlige Dimension haben? Wie kann man die Hausdorff-Dimension eines Fraktals berechnen?
- Was ist Selbstähnlichkeit? Wie kann man Fraktale erzeugen?
- Welche Anwendungen haben Fraktale innerhalb und außerhalb der Mathematik?

Eine genauere Beschreibung der Vortragsthemen finden Sie auf der nächsten Seite.

Vorkenntnisse

Analysis I und II, Grundlagen der Maßtheorie (es reicht, wenn Sie im WS 2021/22 Analysis III hören), Lineare Algebra I. Für die mit * markierten Vorträge sind weitere Vorkenntnisse hilfreich.

Vorbesprechung

Die Vorbesprechung findet am **21.07.21 um 16:00 Uhr online** statt. Schreiben Sie eine E-Mail an ewert@math.uni-hannover.de, um die Zugangsdaten zu erhalten.

Vorläufige Liste der Vortragsthemen

1. **Drei Beispiele**
   Cantormenge ([Edg08, 1.1], [PJS04]2.1), Sierpinski-Dreieck ([Edg08, 1.2], [PJS04]2.2), Kochsche Schneeflocke ([PJS04]2.4).
2. **Boxcounting-Dimension**
   Definition, Äquivalente Definitionen, Beispiele: Cantormenge und Sierpinski-Dreieck, Eigenschaften und Nachteile ([Fal14, 2.1, 2.2]).
3. **Hausdorff-Dimension**
   Hausdorff-Maße, Hausdorff-Dimension, Eigenschaften, Beziehung zur Boxcounting-Dimension ([Fal14, 3.1, 3.2], [Edg08, 6.1]).
4. **Berechnung der Hausdorff-Dimension**
   Beispiel Cantormenge, Massenverteilungsprinzip mit Beispielen ([Fal14, 3.3, 4.1]).
5. **Potentialtheoretische Methoden zur Dimensionsberechnung**
   Frostman-Lemma, s-Potential und s-Energie ([Fal14, 4.2, 4.3]).
6. **Iterierte Funktionensysteme und selbstähnliche Mengen**
   Existenz Attraktor, Ähnlichkeitsdimension und ihre Beziehung zur den vorherigen Dimensionsbegriffen, Beispiele ([Fal14, 9.1, 9.2], [Edg08, 4.1]).
7. **Selbstaffine Mengen und Bildkompression**
   Collage-Theorem, MRCM/ Barnsley-Maschine, Anwendung in der Bildkompression ([Fal14, 9.4, 9.5], [PJS04, 5], [ZP13, IV, VI: 5&6]).
8. **L-Systeme und Turtle-Grafiken***
   L-Systeme, Turtle-Befehle, Implementierung für einige Fraktale ([PJS04, 7], [BD13, 8.1]). *Für diesen Vortrag sind grundlegende Programmierkenntnisse hilfreich.*
9. **Funktionsgraphen und die Weierstraß-Funktion**
   Weierstraß-Funktion und ihre Boxcounting-Dimension ([Fal14, 11.1]), neue Resultate zu ihrer Hausdorff-Dimension in [She18] zusammenfassen, selbstaffine Kurven ([Fal14, 11.1]).
10. **Dynamische Systeme**
    Diskrete dynamische Systeme, Attraktor und Repellor, logistische Abbildung, Web-Diagramm ([Fal14, 13.1, 13.2], [Bar93, IV, 3]).
11. **Iterationen von komplexen Funktionen***
    Julia und Fatou-Mengen, verschiedene Charakterisierungen ([Fal14, 14.1]). *Für diesen Vortrag sind Vorkenntnisse aus der Funktionentheorie hilfreich.*
12. **Juliamengen von quadratischen Funktionen und die Mandelbrotmenge***
    Mandelbrotmenge und äquivalente Charakterisierungen, Juliamengen von quadratischen Funktionen und ihre Hausdorff-Dimension ([Fal14, 14.2, 14.3], [PJS04, 13.4]). *Für diesen Vortrag sind Vorkenntnisse aus der Funktionentheorie hilfreich.*
13. **Brownsche Bewegung***
    Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}$, Hausdorff-Dimension des Graphen und von Niveaumengen ([Fal14, 16.1]). *Für diesen Vortrag sind Vorkenntnisse aus der Stochastik hilfreich.*

Literatur

[Bar93] Michael F. Barnsley, *Fractals everywhere*, 2nd ed., Academic Press Professional, Boston, MA, 1993. Revised with the assistance of and with a foreword by Hawley Rising, III.

[BD13] Karl-Heinz Becker and Michael Dörfler, *Dynamische Systeme und Fraktale: Computergrafische Experimente mit Pascal*, Vieweg+Teubner Verlag, 2013. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-663-00168-3.

[Edg08] Gerald Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2008. https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-74749-1.

[Fal14] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014. Mathematical foundations and applications.

[PJS04] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe, *Chaos and fractals*: *New frontiers of science; With a foreword by Mitchell J. Feigenbaum*, 2nd ed., Springer, New York, 2004. https://link.springer.com/book/10.1007/b97624.

[She18] Weixiao Shen, *Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions*, Mathematische Zeitschrift **289** (2018), no. 1-2, 223–266, DOI 10.1007/s00209-017-1949-1. https://link.springer.com/article/10.1007/s00209-017-1949-1.

[ZP13] Herbert Zeitler and Dusan Pagon, *Fraktale Geometrie — Eine Einführung: Für Studienanfänger, Studierende des Lehramtes, Lehrer und Schüler*, Vieweg+Teubner Verlag, 2013. https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-663-08041-1.