Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Stefan Rosemann

SEMINARANKÜNDIGUNG

„DAS YAMABE-PROBLEM“

SOMMERSEMESTER 2019

- Veranstalter: Dr. Stefan Rosemann
- Einführung und Zielsetzung: Ziel des Seminars ist es, den Beweis des folgenden ziemlich bekannten Theorems aus der Riemannschen Geometrie zu verstehen:

  Sei (M, g) *eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* $n \geq 3$. *Dann existiert auf* M *eine Riemannsche Metrik* $\tilde{g}$ *konform äquivalent zu* g *(d.h.* $\tilde{g} = e^f g$ *für* $f : M \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion), so dass die Skalarkrümmung von* $\tilde{g}$ *konstant ist.*

  Hidehiko Yamabe gab 1960 einen ersten Beweis. Allerdings entdeckte Neil Trudinger 1968 einen kritischen Fehler in Yamabe's Arbeit, den er unter zusätzlichen, jedoch schwer zu verifizierenden Annahmen reparieren konnte. Die also wieder offene Fragestellung, ob denn unter den gegebenen Voraussetzungen eine konform äquivalente Metrik konstanter Skalarkrümmung existiert, ist seither als „Yamabe-Problem“ bekannt. Im Jahr 1976 gelang dann Thierry Aubin der Beweis eines wichtigen Spezialfalls. Den Beweis der verbliebenen Fälle und damit die entgültige Lösung des Yamabe-Problems erfolgte durch Richard Schoen im Jahr 1984. Sein Beweis erregte unter anderem auch deshalb Aufsehen, da in ihm das „positive mass theorem“ aus der Allgemeinen Relativitätstheorie verwendet wurde, welches Schoen zuvor mit Shing-Tung Yau in einer Reihe von Artikeln (1979-1981) bewiesen hatte.

  Das Yamabe-Problem, auch wenn als geometrische Fragestellung formuliert, ist analytischer Natur: Ist nämlich $\tilde{g} = \varphi^{p-2} g$ konform äquivalent zu g für $\varphi : M \to \mathbb{R}$ glatt und positiv und $p = 2n/(n-2)$, so hat $\tilde{g}$ konstante Skalarkrümmung λ, genau dann wenn $\Box\varphi = \lambda\varphi^{p-1}$. Der lineare Operator zweiter Ordnung auf der linken Seite der Gleichung ist der sogenannte konforme Laplace-Operator. Das Yamabe-Problem ist also eine Art „nicht-lineares Eigenwertproblem“.

  Auf dem Weg, den Beweis des Yamabe-Problems zu verstehen, werden also nicht nur Kenntnisse in Riemannscher Geometrie vertieft, sondern auch wichtige Aussagen und Techniken aus der Analysis und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wiederholt und gelernt.

- Voraussetzung: Riemannsche Geometrie, Kenntnisse aus der Analysis (Funktionalanalysis, Sobolev- und Hölderräume) sind hilfreich aber nicht notwendig
- Literatur: Wir werden uns inhaltlich an dem Übersichtsartikel
  - Lee, John M., Parker, Thomas H., *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 17 (1987), no. 1, 37–91

  von John M. Lee und Thomas H. Parker orientieren. Das dort gegebene Inhaltsverzeichnis werden wir auch grob als Orientierung für die verschiedenen Vortragsthemen nutzen. Weitere Literatur wird später noch bekannt gegeben.
- Seminaranmeldung: E-Mail an **stefan.rosemann@math.uni-hannover.de**
- Vorbesprechung: Vermutlich am 26.03.2019 um 14 Uhr (Raum wird noch bekannt gegeben).